**PCSI 09/10 - Programme de colle de Mathématiques n$^{\text{o}}$ 30 : du 14 au 18 juin 2010**

**Espaces vectoriels euclidiens.**

1. **Automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien $E$ de dimension n.**
   Un endomorphisme qui conserve le produit scalaire est un automorphisme dit orthogonal.
   Caractérisation : conservation de la norme - l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée.
   Groupe orthogonal $O(E)$ des automorphismes orthogonaux de $E$.
   Matrice orthogonale. Groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$. Changement de base orthonormée.
   Caractérisation des symétries orthogonales.

**Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 et 3.**

1. Orientation d'un espace vectoriel de dimension 1, 2 ou 3.
2. **Cas d'un plan euclidien $P$** :
   Ecriture d'une matrice de $O_2(\mathbb{R})$. Groupe spécial orthogonal d'ordre 2.
   Groupe spécial orthogonal de P ($SO(P)$). Un automorphisme orthogonal est une réflexion ou la composée de 2 réflexions.
   Cas d'un plan euclidien orienté : angle d'une rotation - déterminant et angle de deux vecteurs.
3. **Cas d'un espace euclidien $E$ de dimension 3** :
   Tout automorphisme orthogonal est composée d'au plus trois rotations Groupe spécial orthogonal.
   Cas d'un espace orienté : déterminant de trois vecteurs - produit vectoriel - angle de deux vecteurs.
   Rotations : axe et angle - matrice dans une base orthonormée.

**Applications affines.**

1. Un espace vectoriel est considéré comme sous espace affine de lui-même et ses vecteurs sont alors notés comme des points. Rappels sur l'intersection de sous-espaces affines et sur le parallélisme.
2. En dimension finie : repère (cartésien), changement de repère.
3. **Application affine.** Partie linéaire. Propriétés. Forme analytique dans un repère en dimension finie.
   Applications affines à connaître : translations, homothéties, projections et symétries affines. Propriétés de ces applications.
4. Définition d'un d'un repère orthonormé (ron) dans un **espace euclidien**.
   Sous-espaces affines orthogonaux, perpendiculaires. Projection orthogonale. Distance d'un point à un sous-espace affine. Définition et propriétés des isométries (affines), déplacements et antidéplacements.

**Plan affine euclidien.**

1. Révisions du premier trimestre.
2. **Isométries** : **déplacements** et antidéplacements. Les réflexions sont les seuls antidéplacements au programme.
3. **Similitudes d'un plan affine euclidien orienté** : définition et propriétés.
   Rappel : caractérisation des similitudes directes à l'aide d'une transformation complexe.
4. Reconnaître la nature et éventuellement les éléments caractéristiques d'une application affine à partir de sa forme analytique dans un repère orthonormé.

**Espace affine euclidien de dimension 3.**

1. Révisions du premier trimestre.
2. **Isométries**. Cas des **déplacements** : translations, rotations et vissages.

Questions de cours.

**Toutes les définitions et tous les énoncés de propositions et théorèmes doivent être connus.**
Les résultats suivants doivent être connus avec leur démonstration.

1. Dans un espace euclidien $E$, un endomorphisme qui conserve le produit scalaire est un automorphisme.
2. En dimension 2 ou 3, le déterminant de la matrice de passage entre deux bases orthonormées vaut 1 ou -1.
3. Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux vecteurs non nuls d'un plan euclidien orienté, il existe une unique rotation vectorielle $u$ telle que $u(\vec{x}) = \frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{y}\|}\vec{y}$.
4. Relation de changement de repère en dimension finie.
5. Une isométrie affine d'un plan euclidien orienté est un déplacement si et seulement si elle conserve les angles orientés.