PCSI 11/12 - Programme de colle de Mathématiques n$^{\text{O}}$ 18 : du 13 au 17 février 2012

Polynômes.

$\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Tout le chapitre sur les polynômes dont la nouvelle partie du programme précédent :

1. Algorithme de Hörner pour la division euclidienne par un polynôme de la forme $X - a$.
2. Polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Théorème de d'Alembert-Gauss (admis).
   Décomposition d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ - dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Relations entre zéros et coefficients d'un polynôme scindé.

Développements limités.

1. Développements limités. Définition. Unicité. En 0, lien avec la parité des fonctions. Développement limité en 0 de $x \mapsto 1/(1-x)$. Somme, produit, composition, quotient (par composition avec celui de $x \mapsto 1/(1+x)$).
2. Formule de Taylor-Young. Application au calcul de développements limités.
   Développements limités en 0 des fonctions : exp, ch, sh, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour α dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
   Développements limités de tan et de th en 0 à l'ordre 5.
3. Intégration et dérivation de développements limités.
   Développement limité en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$, Arctan, Arcsin, Arccos, Argth et Argsh.
4. Cas particuliers (étude sur des exemples) :
   Développement limité à droite et à gauche en un point. Développement limité en un point singulier. Développement limité d'une fonction réciproque par la méthode des coefficients indéterminés.
5. Développement asymptotique d'une fonction non bornée en un point. Développement asymptotique à l'infini.

Questions de cours.

Toutes les définitions et tous les énoncés de propositions et théorèmes doivent être connus.
Les résultats suivants doivent être connus **avec leur démonstration**.

1. Pour P et Q non nuls dans $\mathbb{K}[X]$, si $\left.\begin{array}{l} P \text{ divise } Q \\ deg(P) = deg(Q) \end{array}\right\}$ alors il existe a dans $\mathbb{K}^*$ tel que $Q = aP$.
2. Un polynôme de degré $n \geqslant 3$ de $\mathbb{R}[X]$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Développement limité en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.
4. Une fonction f définie au voisinage de 0 est dérivable en 0 si et seulement si f a un développement limité à l'ordre 1 en 0 et dans ce cas, $f(x) = f(0) + f'(0)x + o_o(x)$.